



# MAA

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

## MAA American Mathematics Competitions

32<sup>nd</sup> Annual

# AMC 8

American Mathematics Contest 8

Tuesday, November 15, 2016

## INSTRUCTIONS

1. DO NOT OPEN THIS BOOKLET UNTIL YOUR PROCTOR TELLS YOU.
2. This is a twenty-five question multiple choice test. For each question, only one answer choice is correct.
3. Mark your answer to each problem on the AMC 8 Answer Form with a #2 pencil. Check the blackened circles for accuracy and erase errors and stray marks completely. Only answers properly marked on the answer form will be graded.
4. There is no penalty for guessing. Your score is the number of correct answers.
5. Only scratch paper, graph paper, rulers, protractors, and erasers are allowed as aids. Calculators are NOT allowed. No problems on the test *require* the use of a calculator.
6. Figures are not necessarily drawn to scale.
7. Before beginning the test, your proctor will ask you to record your information on the answer form.
8. You will have 40 minutes to complete the test once your proctor tells you to begin.
9. When you finish the exam, *sign your name* in the space provided on the answer form.

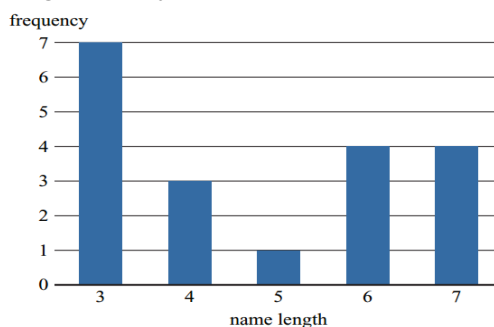
The Committee on the American Mathematics Competitions reserves the right to re-examine students before deciding whether to grant official status to their scores. The Committee also reserves the right to disqualify all scores from a school if it determines that the required security procedures were not followed.

The publication, reproduction or communication of the problems or solutions of the AMC 8 during the period when students are eligible to participate seriously jeopardizes the integrity of the results. Dissemination via copier, telephone, email, internet or media of any type during this period is a violation of the competition rules.

# ĐỀ THI AMC8 – NĂM 2016

Thời gian: 45 phút

1. Trận đấu quần vợt chuyên nghiệp dài nhất từ trước tới nay diễn ra trong 11 giờ 5 phút. Hỏi trận đấu đó kéo dài bao nhiêu phút?  
(A) 605                      (B) 655                      (C) 665                      (D) 1005                      (E) 1105
2. Cho hình chữ nhật ABCD có  $AB = 6$  và  $AD = 8$ . Gọi M là trung điểm của AD. Diện tích của tam giác AMC là bao nhiêu?  
(A) 12                      (B) 15                      (C) 18                      (D) 20                      (E) 24
3. Bốn học sinh làm một bài kiểm tra. Ba trong số họ có điểm số là 70, 80 và 90. Nếu điểm số trung bình của bốn người là 70 thì điểm của người còn lại là bao nhiêu?  
(A) 40                      (B) 50                      (C) 55                      (D) 60                      (E) 70
4. Khi còn là một cậu bé, Cheenu có thể chạy được 15 dặm trong 3 giờ và 30 phút. Bây giờ khi là một người già, ông có thể chạy được 10 dặm trong 4 giờ. Hỏi thời gian chạy một dặm bây giờ của ông nhiều hơn bao nhiêu phút so với khi ông là một cậu bé?  
(A) 6                      (B) 10                      (C) 15                      (D) 18                      (E) 30
5. N là một số có hai chữ số.
  - Khi N chia cho 9, số dư là 1.
  - Khi N chia cho 10, số dư là 3.Hỏi số dư khi N chia cho 11 là bao nhiêu?  
(A) 0                      (B) 2                      (C) 4                      (D) 5                      (E) 7
6. Biểu đồ sau đây cho ta độ dài tên của 19 người (tính bằng số chữ cái). Hỏi số trung vị của độ dài những tên này là bao nhiêu?



- (A) 3                      (B) 4                      (C) 5                      (D) 6                      (E) 7

7. Số nào dưới đây **không** là một số chính phương?

- (A)  $1^{2016}$       (B)  $2^{2017}$       (C)  $3^{2018}$       (D)  $4^{2019}$       (E)  $5^{2020}$

8. Tính giá trị của biểu thức:

$$100 - 98 + 96 - 94 + 92 - 90 + \dots + 8 - 6 + 4 - 2.$$

- (A) 20      (B) 40      (C) 50      (D) 80      (E) 100

9. Tổng của các ước nguyên tố phân biệt của 2016 là bao nhiêu?

- (A) 9      (B) 12      (C) 16      (D) 49      (E) 63

10. Giả sử  $a * b = 3a - b$ . Hỏi  $x$  bằng bao nhiêu nếu:  $2 * (5 * x) = 1$ ?

- (A)  $\frac{1}{10}$       (B) 2      (C)  $\frac{10}{3}$       (D) 10      (E) 14

11. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số thỏa mãn tính chất: Khi ta đem số đó cộng với số thu được bằng cách viết các chữ số của nó theo thứ tự ngược lại thì được tổng bằng 132?

- (A) 5      (B) 7      (C) 9      (D) 11      (E) 12

12. Trường Trung Học Jefferson có cùng số học sinh nam và nữ. Ba phần tư số học sinh nữ và hai phần ba số học sinh nam đã tham gia một chuyến tham quan. Hỏi tỷ số giữa số học sinh nữ tham gia chuyến đi so với tổng số học sinh tham gia chuyến đi là bao nhiêu?

- (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{9}{17}$       (C)  $\frac{7}{13}$       (D)  $\frac{2}{3}$       (E)  $\frac{14}{15}$

13. Hai số phân biệt được chọn ngẫu nhiên từ tập  $\{-2, -1, 0, 3, 4, 5\}$  và nhân với nhau. Hỏi xác suất để tích bằng 0 là bao nhiêu?

- (A)  $\frac{1}{6}$       (B)  $\frac{1}{5}$       (C)  $\frac{1}{4}$       (D)  $\frac{1}{3}$       (E)  $\frac{1}{2}$

14. Trung bình với một ga lông xăng, chiếc xe của Karl có thể chạy 35 dặm. Bình xăng của chiếc xe có thể chứa tối đa 14 ga lông xăng. Một ngày nọ, Karl bắt đầu đi khi chiếc xe chứa đầy xăng, đi được 350 dặm anh ta mua thêm 8 ga lông xăng và tiếp tục lái xe đi tới đích. Khi tới nơi, Karl thấy bình xăng còn nửa bình. Hỏi ngày hôm đó, Karl đã đi được bao nhiêu dặm?

- (A) 525      (B) 560      (C) 595      (D) 665      (E) 735

15. Lũy thừa lớn nhất của 2 là ước của  $134 - 114$  là bao nhiêu?

- (A) 8      (B) 16      (C) 32      (D) 64      (E) 128

16. Annie và Bonnie đang chạy quanh một đường chạy hình bầu dục dài 400 mét. Họ xuất phát cùng lúc nhưng do Annie chạy nhanh hơn Bonnie 25% nên bạn ấy đã vượt lên trước. Hỏi Annie đã chạy được bao nhiêu vòng khi bạn ấy gặp Bonnie lần đầu tiên?

- (A)  $1\frac{1}{4}$       (B)  $3\frac{1}{3}$       (C) 4      (D) 5      (E) 25



17. Mật khẩu thẻ ATM của ngân hàng Fred gồm 4 chữ số từ 0 tới 9, các chữ số có thể lặp lại. Nếu không có mật khẩu nào bắt đầu bằng dãy số 9, 1, 1 thì hỏi có thể có nhiều nhất bao nhiêu mật khẩu?

- (A) 30      (B) 7290      (C) 9000      (D) 9990      (E) 9999

18. Trong một kì thể vận hội, có 216 vận động viên tranh tài ở bộ môn chạy 100 m. Mỗi đường đua có 6 đường chạy, nên chỉ có 6 vận động viên tranh tài ở mỗi lượt đua. Kết thúc mỗi lượt đua, 5 người thua cuộc sẽ bị loại và chỉ có duy nhất người chiến thắng được tham gia các vòng đua sau. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu lượt đua để tìm được người chiến thắng?

- (A) 36      (B) 42      (C) 43      (D) 60      (E) 72

19. Tổng 25 số tự nhiên chẵn liên tiếp là 10000. Hỏi số lớn nhất trong số 25 số tự nhiên chẵn liên tiếp đó là số nào?

- (A) 360      (B) 388      (C) 412      (D) 416      (E) 424

20. Bội chung nhỏ nhất của  $a$  và  $b$  là 12, bội chung nhỏ nhất của  $b$  và  $c$  là 15. Hỏi giá trị nhỏ nhất của bội chung nhỏ nhất của  $a$  và  $c$  là bao nhiêu?

- (A) 20      (B) 30      (C) 60      (D) 120      (E) 180

21. Một hộp chứa 3 đồng xu màu đỏ và 2 đồng xu màu xanh. Các đồng xu được lấy lần lượt ra khỏi hộp một cách ngẫu nhiên cho tới khi lấy được 3 đồng xu màu đỏ hoặc 2 đồng xu màu xanh. Hỏi xác suất để lấy được 3 đồng xu màu đỏ là bao nhiêu?

- (A)  $\frac{3}{10}$       (B)  $\frac{2}{5}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $\frac{3}{5}$       (E)  $\frac{2}{3}$

22. Cho hình chữ nhật DEFA có kích thước  $3 \times 4$  và  $DC = CB = BA = 1$ . Hỏi diện tích của hình “cánh dơi” (phần được tô đen) là bao nhiêu?

- (A) 2      (B)  $2\frac{1}{2}$       (C) 3      (D)  $3\frac{1}{2}$       (E) 4



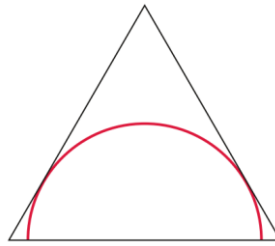
23. Cho hai đường tròn cùng bán kính có tâm  $A$  và  $B$ , mỗi đường tròn lại có tâm nằm trên đường tròn còn lại. Đường thẳng nối hai điểm  $A$  và  $B$  cắt hai đường tròn tại  $C$  và  $D$ . Một trong hai giao điểm của hai đường tròn là  $E$ . Hỏi  $\widehat{CED}$  có số đo là bao nhiêu?

- (A) 90      (B) 105      (C) 120      (D) 135      (E) 150

24. Dùng các chữ số 1, 2, 3, 4 và 5 để viết số có năm chữ số  $\overline{PQRST}$  (mỗi chữ số dùng đúng một lần). Biết số  $\overline{PQR}$  chia hết cho 4,  $\overline{QRS}$  chia hết cho 5 và  $\overline{RST}$  chia hết cho 3. Hỏi  $P$  là chữ số nào?

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4      (E) 5

25. Nửa đường tròn nội tiếp một tam giác cân có đáy là 16 và chiều cao 15 sao cho đường kính của nửa đường tròn nằm trên cạnh đáy của tam giác như hình bên dưới. Hỏi bán kính của nửa đường tròn là bao nhiêu?



(A)  $4\sqrt{3}$

(B)  $\frac{120}{17}$

(C) 10

(D)  $\frac{17\sqrt{2}}{2}$

(E)  $\frac{17\sqrt{3}}{2}$

## LỜI GIẢI

### 1. Đáp án (C):

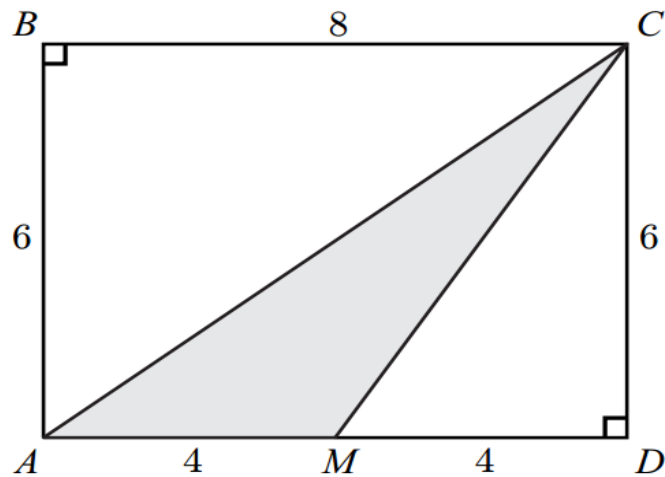
1 giờ = 60 phút. Vậy 11 giờ 5 phút bằng  $11 \cdot 60 + 5 = 665$  phút.

### 2. Đáp án (A):

Diện tích của tam giác ACD là  $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ .

Diện tích của tam giác MCD là  $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ .

Vậy diện tích của tam giác AMC là  $24 - 12 = 12$ .



### 3. Đáp án (A):

Gọi  $x$  là số điểm của người còn lại. Ta có  $70 + 80 + 90 + x = 70 \cdot 4 = 280$ .  
Do đó  $x = 40$ .

### 4. Đáp án (B):

Khi là một cậu bé, Cheenu cần 3 giờ và 30 phút, tức là 210 phút để đi được 15 dặm. Do đó Cheenu cần  $210:15 = 14$  phút để đi được một dặm.

Khi là một người già, ông cần 4 giờ, tức là 240 phút để đi được được 10 dặm. Do đó ông cần  $240:10 = 24$  phút để đi được một dặm.

Vậy khi là một người già, ông cần nhiều hơn  $24 - 14 = 10$  phút so với lúc còn trẻ để đi được một dặm.

**5. Đáp án (E):**

Các số có hai chữ số có số dư là 3 khi chia cho 10 là: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93. Các số có hai chữ số có số dư là 1 khi chia cho 9 là: 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91. Trong các số này, chỉ có duy nhất số 73 thỏa mãn cả hai điều kiện. Lấy 73 chia cho 11 ta được số dư là 7.

**6. Đáp án (B):**

Độ dài của 19 tên là 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7. Giá trị thứ mười, 4, là trung vị.

**7. Đáp án (B):**

Các số  $1^{2016}, 3^{2018}, 5^{2020}$  có số mũ chẵn và do đó là số chính phương. Ta có  $4^{2019} = (2^2)^{2019} = 2^{4038}$ , cũng là một số chính phương. Số  $2^{2017}$  không là số chính phương bởi vì nó bằng 2 lần một số chính phương  $2(2^{1008})^2$ .

**8. Đáp án (C):**

Ta tính giá trị biểu thức bằng cách chia thành các nhóm như sau:

$$(100 - 98) + (96 - 94) + \dots + (8 - 6) + (4 - 2) = 2 + 2 + \dots + 2 + 2 = 2 \cdot 25 = 50.$$

**9. Đáp án (B):**

Phân tích 2016 thành tích của các thừa số nguyên tố ta được:

$$2016 = (2^5)(3^2)(7).$$

Do đó các số nguyên tố phân biệt là ước của 2016 là 2, 3 và 7. Tổng của chúng là  $2 + 3 + 7 = 12$ .

**10. Đáp án (D):**

Ta có  $2 * (5 * x) = 1$ , do đó  $6 - (5 * x) = 1$ , và như vậy  $5 * x = 5$ . Áp dụng công thức một lần nữa, ta có  $15 - x = 5$  và như vậy  $x = 10$ .

**11. Đáp án (B):**

Gọi  $\overline{ab}$  là số có hai chữ số. Ta có:

$$132 = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b).$$



Do đó  $a + b = 12$ . Các số thỏa mãn là: 39, 93, 48, 84, 57, 75, 66. Vậy có 7 số có hai chữ số thỏa mãn.

### 12. Đáp án (B):

Chuyển các tỉ số về cùng mẫu số, ta thấy rằng có  $\frac{9}{12}$  số học sinh nữ và  $\frac{8}{12}$  số học sinh nam đã tham gia chuyến đi. Do đó, tỉ số giữa số học sinh nữ và số học sinh nam đã tham gia chuyến đi là 9:8. Vậy, có  $\frac{9}{17}$  số học sinh đã tham gia là nữ.

### 13. Đáp án (D):

Có  $6 \cdot 5 = 30$  cặp hai số khác nhau. Để tích bằng 0 thì số hạng đầu tiên bằng 0 hoặc số hạng thứ hai bằng 0, do đó có  $1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 10$  trường hợp như thế. Xác suất cần tính là  $10/30 = 1/3$ .

### 14. Đáp án (A):

Khi đi với tốc độ 350 dặm, Karl đã sử dụng  $350:35 = 10$  gallon xăng, do vậy cậu ấy còn  $14 - 10 = 4$  gallon xăng trong bình. Sau khi mua thêm 8 gallon, cậu ấy có  $4 + 8 = 12$  gallon xăng. Khi tới nơi, Karl còn  $14:2 = 7$  gallon xăng, như vậy cậu ấy đã dùng thêm  $12 - 7 = 5$  gallon xăng. Lượng xăng này đủ để đi thêm  $5 \cdot 35 = 175$  dặm, vậy Karl đã đi  $350 + 175 = 525$  dặm.

### HOẶC

Karl đã sử dụng  $14 + 8 - 14:2 = 15$  gallon xăng cho chuyến đi, như vậy cậu ấy đã đi  $15 \cdot 35 = 525$  dặm.

### 15. Đáp án (C):

Sử dụng hằng đẳng thức hiệu của 2 bình phương:

$$\begin{aligned} 13^4 - 11^4 &= (13^2 + 11^2)(13 + 11)(13 - 11) = 290 \cdot 24 \cdot 2 \\ &= 2 \cdot 145 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2 = 32 \cdot 435 \end{aligned}$$

Vậy lũy thừa bậc 2 cao nhất là ước số của  $13^4 - 11^4$  là 32.

**16. Đáp án (D):**

Đặt  $N$  là số vòng Annie đã chạy được tới khi gặp Bonnie lần đầu. Số vòng Bonnie đã chạy được là  $N-1$ . Vậy  $N/N - 1 = 1.25 = 5/4$ . Suy ra  $N=5$ .

**HOẶC**

Với mỗi vòng chạy của Bonnie, Annie chạy được  $1\frac{1}{4}$  vòng, vì vậy trong cùng một khoảng thời gian, Annie chạy được nhiều hơn Bonnie  $\frac{1}{4}$  vòng chạy. Annie sẽ gặp Bonnie lần đầu khi Bonnie đã chạy được 4 vòng và Annie đã chạy được 5 vòng.

**17. Đáp án (D):**

Nếu không có điều kiện ràng buộc, ta có thể có  $10^4$  mật khẩu. Trong đó có 10 mật khẩu bắt đầu với 9 1 1 và 10 mật khẩu có 4 chữ số. Vì vậy có:

$$10^4 - 10 = 9990 \text{ mật khẩu thỏa mãn điều kiện.}$$

**18. Đáp án (C):**

Chia 216 vận động viên thành 36 nhóm gồm 6 người, thực hiện 36 lượt đua sẽ loại được 180 vận động viên, còn lại 36 người thắng cuộc. Chia 36 vận động viên còn lại thành 6 nhóm 6 người, thực hiện 6 lượt đua để loại 30 vận động viên, còn lại 6 người thắng cuộc. Và thực hiện 1 lượt đua cuối cùng để chọn ra nhà vô địch. Tổng số lượt đua là:  $36 + 6 + 1 = 43$ .

**HOẶC**

Sau khi thực hiện xong tất cả các lượt đua, 215 vận động viên sẽ bị loại vì sẽ có 5 người bị loại ở mỗi lượt, vậy sẽ có  $215 : 5 = 43$  lượt đua cần thực hiện để tìm ra nhà vô địch.

**19. Đáp án (E):**

Trung bình của 25 số nguyên chẵn là  $10000 : 25 = 400$ . Vậy có 12 số nguyên chẵn liên tiếp lớn hơn 400 và 12 số nguyên chẵn liên tiếp nhỏ hơn 400. Tổng  $376 + 378 + \dots + 398 + 400 + 402 + \dots + 424 = 10000$ . Số lớn nhất là 424.

**HOẶC**

Trung bình của 25 số nguyên chẵn là  $10000 : 25 = 400$ . Vì 12 số nguyên chẵn liên tiếp lớn hơn 400 nên số lớn nhất là  $400 + 12 \cdot 2 = 424$ .

**20. Đáp án (A):**

Nếu  $b = 1$  thì  $a = 12$ ,  $c = 15$  và bội chung nhỏ nhất của  $a$  và  $c$  là 60. Nếu  $b > 1$ , thì mọi thừa số nguyên tố của  $b$  phải đồng thời là thừa số nguyên tố của 12 và 15, do đó chỉ có duy nhất một giá trị  $b = 3$ . Trong trường hợp này,  $a$  phải là bội số của 4 và là ước số của 12, vậy  $a = 4$  hoặc  $a = 12$ . Tương tự,  $c$  phải là bội số của 5 và là ước số của 15, vậy  $c = 5$  hoặc  $c = 15$ . Từ đó suy ra bội chung nhỏ nhất của  $a$  và  $c$  là bội của 20. Khi  $a = 4$ ,  $b = 3$ , và  $c = 5$ , bội chung nhỏ nhất của  $a$  và  $c$  là 20.

**21. Đáp án (B):**

Xét trường hợp rút cả 5 thẻ và liệt kê tất cả các kết quả xảy ra: RRRGG, RRGRG, RGRRG, GRRRG, GGRRR, GRGRR, RGGRR, GRRGR, RGRGR, RRGGR.

Toàn bộ 10 kết quả này đều có cùng khả năng xảy ra. Kết quả kết thúc bằng G tương ứng với các kết quả mà 3 thẻ màu đỏ được rút và kết quả kết thúc bằng R tương ứng với các kết quả mà 2 thẻ màu xanh được rút. Xác suất rút được 3 thẻ màu đỏ là  $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ .

**22. Đáp án (C):**

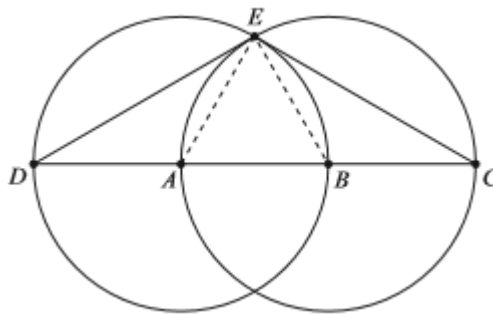
Diện tích  $\Delta BCE$  là  $\frac{1}{2}(1)(4) = 2$ .  $\Delta CBH$  và  $\Delta EFH$  là 2 tam giác đồng dạng. Vì  $CB = 1/3 EF$ , kéo theo  $IH = 1/3 GH = 1/4 IG = 1$ . Diện tích  $\Delta CBH$  là  $1/2$ , suy ra diện tích  $\Delta ECH$  là  $2 - 1/2 = 3/2$ . Do đó diện tích vùng cánh dơi là 3.

**23. Đáp án (C):**

Ta biết  $\Delta AEB$  là tam giác đều vì có hai cạnh bên là hai bán kính của hai đường tròn đồng nhất. Do đó số đo của góc  $\angle AEB$  là  $60^\circ$ . Vì đoạn  $DB$  là đường kính của đường tròn tâm  $A$  và đoạn  $AC$  là đường kính của đường tròn tâm  $B$ , ta có  $\angle DEB$  và  $\angle AEC$  đều là góc vuông. Do đó, độ lớn góc  $\angle DEC$  là  $90^\circ + 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

**HOẶC**

Ta biết  $\Delta AEB$  là tam giác đều vì có hai cạnh bên là hai bán kính của hai đường tròn đồng nhất. Do đó số đo của góc  $\angle AEB$  và  $\angle EAB$  là  $60^\circ$ . Suy ra số đo của  $\angle DAE$  là  $120^\circ$ , và vì  $\Delta DAE$  cân, số đo góc  $\angle DEA$  là  $30^\circ$ . Tương tự, số đo góc  $\angle DEB$  cũng bằng  $30^\circ$ . Từ đó suy ra, độ lớn góc  $\angle DEC$  là  $30^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ .



**24. Đáp án (A):**

Vì  $QRS$  chia hết cho 5, ta biết  $S = 5$ . Vì  $PQR$  chia hết cho 4, ta có  $QR$  là 12, 32 hoặc 24. Vậy  $RST$  có thể là  $25T$  hoặc  $45T$  và chia hết cho 3. Sử dụng những chữ số đã cho, 453 là số duy nhất chia hết cho 3. Vậy  $T = 3$ ,  $R = 4$  và  $P = 1$ .

## 25. Đáp án (B):

Gọi  $O$  là trung điểm của cạnh đáy  $AB$  trong  $\triangle ABC$  đồng thời là tâm của nửa đường tròn. Tam giác  $\triangle OBC$  là tam giác vuông có cạnh  $OB = 8$  và  $OC = 15$ , vậy áp dụng Định lý Pythagore ta có  $BC = 17$ . Gọi  $E$  là tiếp điểm của nửa đường tròn với cạnh  $BC$ , ta có bán kính  $OE$  vuông góc với  $BC$ . Suy ra  $\triangle OEB$  và  $\triangle COB$  đồng dạng, từ đó ta có  $OE : CO = OB : CB$ . Suy ra  $OE/15 = 8/17$ , vậy  $OE = 120/17$ .

### HOẶC

Gọi  $O$  là trung điểm của cạnh đáy  $AB$  trong  $\triangle ABC$  đồng thời là tâm của nửa đường tròn.  $\triangle OBC$  là tam giác vuông có cạnh  $OB = 8$  và  $OC = 15$ , vậy áp dụng Định lý Pythagore ta có  $BC = 17$ . Gọi  $E$  là tiếp điểm của nửa đường tròn với cạnh  $BC$ , ta có bán kính  $OE$  vuông góc với  $BC$ . Vì diện tích  $\triangle OBC$  là  $\frac{1}{2}(BC)(OE) = \frac{1}{2}(OB)(OC)$ , suy ra  $\frac{1}{2}(17)(OE) = \frac{1}{2}(8)(15)$  và như vậy  $OE = 120/17$ .

